Исчисление совместности предложений.

И. Е. Орлов (Москва).

§ 1. Путем исключения некоторых „аксиом“ па так наз. „исчисления предложений“, являющегося наиболее общей частые математической логики, может быть получена символическая система, существенно отличная по основной концепции от классической теории. В основе классической математической логики лежит известное понятие материального вывода, которое может соединять в одной формуле два., предложения, не имеющие никакой внутренней связи по смыслу; между тем та система, которую мы имеем в виду, может трактовать в символической форме смысловые связи между предложениями. Вместе с тем эта система рассматривает в первую очередь не вопрос об истинности и ложности заданных предложений, но вопрос об их совместности или несовместности между собою. Поэтому в отличие от классического „исчисления предложений“ мы называем развиваемую здесь систему „исчислением совместности предложений“. Можно утверждать также, что разработка указанной теории является проблемой, стоящей на очереди, в виду необходимости согласовать символическую логику с новыми приемами, введенными интуиционизмом.

Важная особенность интуиционизма заключается в том, что в работах иитуицнонистов определяемые понятия зависят не непосредственно от определяющих предложений a, b, c ... но от функций последних, следующего вида: „a достоверно известно“, „a доказуемо“, a приводимо к абсурду“, „абсурдность a абсурдна“ и т. п. [1]). Применение иитуиционистами подобных функций есть факт, и этот факт не может быть игнорируем при разработке математической логики. Однако введение функций подобного рода в классическую математическую логику приводит к противоречию с законом „tertium non datur“: в дальнейшем будет показано, что оно вообще невозможно. Между тем „исчисление совместности предложений“ допускает введение указанных функций и символические операции над ними, в результате которых положения интуиционизма получаются без отрицания закона „tertium non datur“, т.-е. приводятся в полное согласие с последним.

Прежде чем перейти к формальному изложению нашей теории, сделаем несколько предварительных поясняющих замечаний.

В тех случаях, когда в классической математической логике вывод делается из двух или нескольких предложений, посылки, образующие „логическое произведение“, утверждаются вместе, как истинные; но такое требование совместного

[264]

утверждения посылок вносит в логику элемент, чуждый сущности дела. Для возможности дедуктивного вывода требование истинности посылок, вообще говоря, не является необходимым; достаточно, если удовлетворяется более слабое требование — совместности посылок. Из ложных предложений могут быть выведены истинные следствия, но из посылок, несовместных между собою, выводы вообще невозможны. Отсюда следует, что требование совместности предложений является достаточным, а требование их совместной истинности — чрезмерным.

[1]) См. напр. L. E. J. Brouwer, Zur Begründung der intuitionistischen Mathematik, Math. Ann., Bd. 93, 1925.

Понятие совместности предложений может быть определено следующим образом: предложение a „совместно“ с предложением b, если из a не следует отрицание b. Таким образом, определение понятия „совместности“ основывается на понятиях „следование“ и „отрицание“. Эти два последних понятия мы принимаем как исходные, и формально они остаются без определения; тем не менее мы остановимся на понятии вывода (или „следования“), для того чтобы выяснить, что мы под этим подразумеваем.

Выражение „$a \to b$“ (из a следует b) в развиваемой здесь системе нельзя смешивать с „материальным выводом“. На основании указанного выражения можно сказать: „или a ложно, или b истинно“; однако сказанного недостаточно, и смысл приведенного символического выражения этим не исчерпывается. Для того, чтобы можно было написать „$a \to b$“, необходимо, еще, чтобы существовала определенная связь по смыслу между предложениями a и b [2]).

Указанная „связь по смыслу“ охватывает все те случаи, когда предшествующий член предполагает последующий или невозможен без него. Более отчетливо понятие вывода может выясниться лишь в процессе развития теории.

Таким образом, исходным пунктом теории являются не данные об истинности и ложности отдельных предложений, но данные о наличности или отсутствии между предложениями смысловых связей означенного типа; из данных в качестве посылок отношений вывода и совместности выводятся другие отношения аналогичного типа в качестве следствий.

Названия „вывод“, „логическое произведение“, „логическая сумма“ даны определенным символическим формулам, а не тем или другим интерпретациям последних. Поэтому мы сохраняем указанные названия, придавая формулам иной смысл. В частности, логическое произведение двух предложений не означает более их совместного утверждения, но означает утверждение их совместности. В связи с этим смысл символических выражений, принимаемых в качестве аксиом, также изменяется, и часть аксиом классического „исчисления предложений“ приходится признать ложными. Прежде всего подлежит устранению так называемый „принцип упрощения“: „из a и b, взятых вместе, следует a“. В самом деле, выражение „a и b“ истолковывается нами как утверждение совместности предложений a и b между собою. Но из совместности предложений не следует их истинность, так как совместными могут быть также и ложные предложения.

Принцип упрощения может быть выражен также в равносильной форме: „из a следует или b или a“ [3]). Эта вторая форма принята Russell’ем в качестве аксиомы под названием „принципа дополнения“ (principle of addition) [4]); согласно измененной интерпретации понятия логической суммы, это предложение

[265]

также должно быть признано ложным [5]). Равным образом должно быть ис-

[2]) Например, предложение „Сократ человек, следовательно Сократ смертен“ — истинно; но предложение „Сократ человек, следовательно дважды два четыре“ — ложпо. Между тем в классической математической логике оба выражения рассматриваются, как истинные.

[3]) См. Peano, Notations de Logique Mathematique. Turin. 1894, p. 9.

[4]) Whitehead and Russell, Principia Mathematica. Cambridge, 1910, v. 1, p. 100.

[5]) Указанные предложения ложны как общие формулы; в частных случаях (с кото-

ключено предложение „$a \to (b \to a)$“, принятое в качестве аксиомы в системе Hilbert'а [6]).

С технической стороны наша задача сводится к разработке логического исчисления, без применения „принципа упрощения“ или какого-либо другого предложения, ему равносильного. Так как доказательства большей части теорем исчисления предложений основывались на применении указанного принципа или его следствий, то его исключение вносит значительные изменения в изложение символической теории. Однако при этом обнаруживается замечательный факт, неизвестный Peano и Russell'ю, а именно — важнейшие теоремы, обосновывающие дедукцию, которые всегда доказывались при помощи принципа упрощения (или предложений, ему равносильных), в действительности от этого принципа не зависят. По исключении принципа упрощения оказывается невозможным вывести только предложения парадоксального характера, как например: „истинное предложение следует из всякого предложения“, „из ложного предложения следует всякое предложение“, „все истинные предложения эквивалентны“ и проч.

В формальной теории подлежат различению аксиомы и предложения, из них выведенные, с одной стороны, и те предложения a, b, c ..., которые должны быть подставлены в аксиомы и к которым аксиомы применяются. Первые должны рассматриваться как достоверные и утверждаемые; что же касается вторых, то в общей части нашей работы мы отвлекаемся от вопроса о достоверности и вообще доказуемости данных посылок a, b, c ... предложений является невозможным. Во второй части работы мы вводим специальные функции предложений, и только там становится возможным утверждение отдельных предложений.

Мы будем придерживаться символических обозначений, принятых Hilbert'ом, как наиболее простых и удобных, обозначая, ради простоты, предложения малыми латинскими буквами и сохраняя для логического произведения традиционную точку. В эту символику, однако, мы будем вкладывать измененное содержание.

Знак „=“ будет обозначать повсюду лишь соглашение относительно начертания символов, и может быть прочитан: „иначе пишется“. Определяемое выражение мы будем писать справа, определяющее — слева. Мы будем вести отдельнуюнумерацию для аксиом, определений и для выведенных предложений.

§ 2. „Предложение“ мы рассматриваем как элементарный факт, не подлежащий анализу, и принимаем без определения в качестве исходного понятия. В качестве исходных принимаем также понятия „вывод“ и „отрицание“, обозначая их обычным образом.

Отношение совместности двух предложений (логическое произведение) может быть формально определено следующим образом:

$$\neg(a \to \neg b) = a{\cdot}b \qquad \text{Опр. (1).}$$

Отрицание отношения совместности есть отношение несовместности:

$$\neg(a{\cdot}b) = a|b \qquad \text{Опр. (2).}$$

рыми мы встретимся) они могут быть истинными.

[6]) „Ueber das Unendliche“, Math. Ann., Bd. 95, 1925. Из двенадцати логических аксиом, приводимых Ackermann'ом в работе „Begründung des tertium поп datur“, Math., Ann., Bd. 93. p. 4, с нашей точки зрения, истинными предложениями могут быть признаны лишь №№ 2, 3, 4, 10 и 12.

[266]

Приведем список шести формальных аксиом, которых достаточно для развития общей части „исчисления“, т.-е. для обоснования общей теории дедукции.

$$a \to \neg\neg a \qquad \text{Акс. (1)}$$

$$\neg\neg a \to a \qquad \text{Акс. (2)}$$

$$a \to a{\cdot}a \qquad \text{Акс. (3)}$$

$$(a \to b) \to (\neg b \to \neg a) \qquad \text{Акс. (4)}$$

$$\{a \to (b \to c)\} \to \{b \to (a \to c)\} \qquad \text{Акс. (5)}$$

$$(b \to c) \to \{(a \to b) \to (a \to c)\} \qquad \text{Акс. (6).}$$

Акс. (4) известна под названием „принцип противопоставления“. На основании акс. (4) мы можем предложить следующую наиболее отвечающую сущности дела интерпретацию понятия вывода: следствие b есть необходимое условие основания a, так как из ложности b следует ложность a [7]).

Если же вывод делается не из одной, а из двух или более посылок, то выводное предложение является условием уже не истинности, но только совместности посылок. Рассмотрим выражение „$a{\cdot}b \to c$“, которое представляет собою общую схему силлогистического вывода, т.-е. вывода из двух посылок. Предложения a и b могут быть истинными или ложными, — это, вообще говоря, безразлично, так как в правильно построенном силлогизме истинное следствие может вытекать как из истинных, так и из ложных посылок. По одно условие является необходимым для того, чтобы существовал силлогизм. Необходима „связь по смыслу“ между совместностью посылок, с одной стороны, и истинностью заключения — с другой. „Силлогизм“ имеет место, если выполнены следующие условия: в случае истинности предложения c, гипотеза истинности a не зависит от b. Если же c ложно, то гипотеза истинности a допустима лишь при условии ложности b. Таково же и обратное отношение b к a. Итак, мы говорим: c вытекает из совместности, а не из истинности a и b; если c ложно, то a и b несовместны, т.-е. в этом случае из a следует $\neg b$ и из b следует $\neg a$. Это и выражается формулой, получаемой на основании акс. (4) и опр. (2):

$$(a{\cdot}b \to c) \to (\neg c \to (a|b)).$$

Таким образом, выводы, которые могут быть получены из каких-либо посылок, вообще говоря, могут быть рассматриваемы только как необходимые условия совместности посылок — и отнюдь не более. Однако, совершенно иначе должен быть оценен тот частный случай, когда посылками являются аксиомы или же предложения доказанные. К этому мы и переходим.

Для того чтобы можно было пользоваться приведенными аксиомами для построения системы, необходимо принять одну аксиому не формального характера:

„Аксиомы, а также предложения, выведенные из аксиом, могут быть опущены в составе символических формул, если они служат посылками каких-либо выводов“. Акс. (7).

[7]) Или иначе: „$a \to b$“ интерпретируем: „a предполагает b“. Интерпретация понятия вывода не может быть иной, поскольку мы отвлекаемся от вопроса о достоверности подставляемых в аксиомы предложении a, b — и принимаем их условно.

[267]

Таким образом, если мы имеем выражение „$a \to b$“, причем a—аксиома (или предложение ранее доказанное), то в этом случае можно утверждать предложение b отдельно.

На основании акс. (2) и (6) имеем

$$(\neg\neg a \to a) \to \{(a \to \neg\neg a) \to (a \to a)\},$$

причем выражение „$a \to a$“, или „закон тождества“, на основании акс. (7) может быть написано отдельно.

На основании акс. (2) пишем

$$\neg\neg(a \to \neg b) \to (a \to \neg b)$$

и на основании опред. (1) и (2)

$$a|b = \neg\neg(a \to \neg b),$$

откуда получаем:

$$\neg(a{\cdot}b) \to (a \to \neg b). \qquad (1a)$$

Аналогично получается выражение:

$$(a \to \neg b) \to \neg(a{\cdot}b). \qquad (1b)$$

Докажем выражение:

$$\neg(a{\cdot}\neg b) \to (a \to b). \qquad (1c)$$

Доказательство. На основании акс. (6):

$$(\neg\neg b \to b) \to \{(a \to \neg\neg b) \to (a \to b)\},$$

при чем выраж. $(\neg\neg b \to b)$ может быть опущено (акс. 7). Подставляя в $(1a)$ $\neg b$ на место b имеем:

$$\neg(a{\cdot}\neg b) \to (a \to \neg\neg b).$$

На основании акс. (6):

$$[(a \to \neg\neg b) \to (a \to b)] \to \{[\neg(a{\cdot}\neg b) \to (a \to \neg\neg b)] \to [\neg(a{\cdot}\neg b) \to (a \to b)]\}$$

и опуская доказанные выражения, получаем (1c).

Так же доказывается:

$$(a \to b) \to \neg(a{\cdot}\neg b) \qquad (1d)$$

Применяя акс. (4) к $(1c)$ и $(1d)$, получаем:

$$\neg(a \to b) \to (a{\cdot}\neg b) \qquad (1e)$$

$$(a{\cdot}\neg b) \to \neg(a \to b) \qquad (1f)$$

Если мы имеем два таких предложения a и ft, между которыми вовсе отсутствует какая бы то ни было внутренняя связь, то будут ложны все четыре возможных отношения вывода: „$a \to b$“, „$a \to \neg b$“, „$\neg a \to b$“ и „$\neg a \to \neg b$“. На основании опр. (1)

[268]
и выраж. (1e) легко показать, что все четыре выражения совместности „$a{\cdot}b$“, „$a{\cdot}\neg b$“, „$\neg a{\cdot}b$“ и „$\neg a{\cdot}\neg b$“ будут в этом случае одновременно справедливы [8]).

Акс. (3) требует, чтобы истинное предложение было совместно с самим собою, т.-е. не противоречило себе. На основ, акс, (3) и (4) и выраж. (1a) можно написать также:

$$a|a \to \neg a; \tag{2a}$$

легко выводятся также выражения:

$$(a|a)|a, \tag{2b}$$

$$(a \to \neg a) \to \neg a \tag{2c}$$

Выражение „$a|a$“, из которого следует „$a \to \neg a$“, означает несовместность предложения с собой, или его противоречивость. Такое предложение может быть названо абсурдным.

(2c) выражает тот нередко встречающийся в математике случай, когда из допущения a следует $\neg a$, что служит доказательством ложности a [9]).

Это—принцип „reductio ad absurdum“.

Подставляя во (2c) $\neg a$ вместо a, легко получить выражение:

$$(\neg a \to a) \to a \tag{2d}$$

Выражение „$a{\cdot}a \to a$“ является, вообще говоря, ложным, так как из того, что предложение не является противоречивым, еще не следует, что оно истинно [10]). Равным образом ложно выражение „$\neg a \to a|a$“.

Докажем несколько простых формул, которыми в дальнейшем нам придется пользоваться.

$$(a \to b) \to (\neg\neg a \to b) \tag{3a}$$

Доказ. На осн. акс. (6)

$$(a \to b) \to \{(\neg\neg a \to a) \to (\neg\neg a \to b)\},$$

что на основании акс. (5) можно написать в виде:

$$(\neg\neg a \to a) \to \{(a \to b) \to (\neg\neg a \to b)\},$$

откуда и получается (3a).

$$a|b \to \neg\neg a|b \tag{3b}$$

Доказ.

$$(a \to \neg b) \to (\neg\neg a \to \neg b)$$

на основании (3а). Кроме того, имеем:

---

[8]) Так получается, например, когда предложения взяты из различных областей знания. Отсюда не следует, конечно, что предложения совместные не могут быть связаны по смыслу.

[9]) Случай, когда из предложения следует его отрицание, является частным случаем абсурдности. Всякое предложение, приведенное к противоречию с какой-либо аксиомой, может быть названо абсурдным.

[10]) В некоторых частных случаях выражение указанного типа может быть истинным.

$$a|b \to (a \to \neg b) \text{ и } (\neg\neg a \to \neg b) \to \neg\neg a|b;$$

отсюда путем двукратного применения акс. (6) получаем ($3b$).

[269]

Аналогично доказываются выражения:

$$(\neg\neg a \to b) \to (a \to b) \tag{3c}$$

$$(a \to \neg\neg b) \to (a \to b) \tag{3d}$$

$$\neg\neg a|b \to a|b \tag{3e}$$

Подставляя в ($3c$) $\neg b$ на место b и применяя акс. (4), получаем:

$$\neg(a \to \neg b) \to \neg(\neg\neg a \to \neg b),$$

что, на основании опр. (1), можно написать в виде:

$$a{\cdot}b \to \neg\neg a{\cdot}b; \tag{3f}$$

аналогично получается:

$$\neg\neg a{\cdot}b \to a{\cdot}b. \tag{3g}$$

На осн. ($3c$) пишем:

$$(\neg\neg a \to \neg\neg b) \to (a \to \neg\neg b)$$

Сопоставляя с ($3d$) и применяя акс. (6), получаем:

$$(\neg\neg a \to \neg\neg b) \to (a \to b). \tag{3h}$$

Так же легко выводятся:

$$(\neg a \to b) \to (\neg b \to a), \tag{3i}$$

$$(a \to \neg b) \to (b \to \neg a), \tag{3k}$$

Из акс. (4) вытекает коммутативный закон:

$$a{\cdot}b \to \; b{\cdot}a. \tag{4a}$$

Доказ. На осн. ($3k$) и акс. (4):

$$\{(b \to \neg a) \to (a \to \neg b)\} \to \{\neg(a \to \neg b) \to \neg(b \to \neg a)\}.$$

На основании опр. (1) и опуская выражение слева на осн. акс (7), получаем ($4a$).

На основ. ($1c$) и ($1d$), акс. (4) может быть представлена в виде $a|\neg b \to \neg b|a$, откуда, заменяя $\neg b$ на b, получаем:

$$a|b \to b|a. \tag{4b}$$

Перейдем к следствиям акс. (5). Подставим в акс. (5) $\neg c$ на место c:

$$\{a \to (b \to \neg c)\} \to \{b \to (a \to \neg c)\}.$$

Применяя к указанному выражению акс. (4) и опр. (1), получаем:

$$a|b{\cdot}c \to b|a{\cdot}c. \tag{5a}$$

Из (4b) следует:

$$a|b{\cdot}c \rightarrow b{\cdot}c|a. \tag{5b}$$

[270]
Докажем выражение:

$$a|b{\cdot}c \rightarrow a|c{\cdot}b. \tag{5c}$$

Доказ. Согласно (4b) имеем $b|c \rightarrow c|b$, откуда на осн. акс. (6) следует $a \ \rightarrow b|c) \rightarrow (a \rightarrow c|b$. Последнее выражение на осн. опред. (1) и (2) можно написать в виде (5c).

$$a|b{\cdot}c \rightarrow a{\cdot}b|c. \tag{5d}$$

Доказ. Применяя к выражению a \ b.c последовательно преобразования (5c), (5a) и (5b), получаем (5d).

Так же легко выводятся выражения:

$$a{\cdot}b|c \rightarrow a|b{\cdot}c, \tag{5e}$$

$$a{\cdot}b|c \rightarrow a{\cdot}c|b, \tag{5f}$$

и т. д.

Применяя акс. (4) к выражениям (5a) — (5f), получаем выражения ассоциативного закона:

$$(a{\cdot}b){\cdot}c \rightarrow a{\cdot}(b{\cdot}c). \tag{5g}$$

$$(a{\cdot}b){\cdot}c \rightarrow c{\cdot}(b{\cdot}a). \tag{5h}$$

и т. д.

Т. о. в связи с акс. (4) , акс. (5) является лишь другим выражением ассоциативного закона. Остановимся на значении ассоциативного закона в нашем „исчислении совместности предложений“.

Выражение „$(a{\cdot}b){\cdot}c$“ представляет „логическое произведение“ двух предложений — предложения $a{\cdot}b$ и предложения c, или же в нашей интерпретации это есть гипотеза совместности предложения c с гипотезой совместности предложений a и b.

Условимся выражения (5g), (5h) и т. п. писать без скобок:

$$(a{\cdot}b){\cdot}c = a{\cdot}b{\cdot}c \qquad \text{Def. (3)}$$

Выражение „$a{\cdot}b{\cdot}c$“ можно интерпретировать как „совместность трех предложений“; по существу это означает совместность любого из этих трех предложений с гипотезой совместности двух остальных.

Укажем на следующие выводы, которые с первого взгляда могут показаться парадоксальными: предложение „$a{\cdot}b{\cdot}c \rightarrow a{\cdot}b$“, вообще говоря, ложно; предложение „$a{\cdot}\neg a{\cdot}b$“ может быть истинным. Покажем, что это действительно так. Пусть мы имеем предложение $a{\cdot}b \rightarrow d$, а следовательно также $\neg d \rightarrow (a|b)$.

Пусть теперь мы выбрали предложение c, не имеющее никакой связи но смыслу с предложениями a, b, d. В таком случае будут правильны выражения: „$c{\cdot}d$“, „$c{\cdot}(a{\cdot}b)$“, „$(c{\cdot}a){\cdot}b$“ и т. д., а след. и предлож. „$a{\cdot}b{\cdot}c$“. Но одновременно будут правильны выражения „$c{\cdot}\neg d$“ и „$c{\cdot}(a|b)$“. Все указанные предложения остаются справедливыми, независимо от того, истинно или ложно предложение d. Но выражение „$a{\cdot}b$“ становится ложным, если ложно d. Таким образом, возможно, что выражение „$a{\cdot}b{\cdot}c$“ остается истинным, в то время когда „$a{\cdot}b$“ ложно. Отсюда следует, что выражение „$a{\cdot}b{\cdot}c \to a{\cdot}b$“ не верно.

Истинность выражения „$a{\cdot}\neg a{\cdot}b$“ вытекает из отрицания „принципа упрощения“. В самом деле: на осн. ($1e$):

$$\neg(a{\cdot}b \to a) \to a{\cdot}b{\cdot}\neg a,$$

[271]

откуда на осн. ассоциативного закона вытекает $a{\cdot}\neg a{\cdot}b$. Заметим, что выражение „$\neg(a{\cdot}\neg a \to b)$“ является правильным во всех тех случаях, когда a и b не связаны по смыслу.

§ 3. Докажем „принцип внесения“ и „принцип вынесения“.

$$\{a \to (b \to c)\} \to (a{\cdot}b \to c) \tag{6a}$$

Доказ. На осн. ($1d$):

$$(b \to c) \to \neg(b{\cdot}\neg c)$$

откуда на осн. акс. (6) вытекает:

$$\{a \to (b \to c)\} \to \{a \to \neg(b{\cdot}\neg c)\}$$

Далее пишем ($1d$) в виде

$$(a \to b) \to a|\neg b$$

и подставляем на место b выражение $\neg(b{\cdot}\neg c)$. В результате получаем:

$$\{a \to \neg(b{\cdot}\neg c)\} \to (a|\neg\neg(b{\cdot}\neg c)).$$

$$a|\neg\neg(b{\cdot}\neg c) \to a|b{\cdot}\neg c \qquad \text{на осн. } (1b) \text{ и } (3e),$$

$$a|b{\cdot}\neg c \to a{\cdot}b|\neg c \qquad \text{на осн. } (5d).$$

$$a{\cdot}b|\neg c \to (a{\cdot}b{\cdot} \to c) \qquad \text{на осн. } (1c).$$

Применяя последовательно акс. (6) к ряду приведенных выражений, получаем ($6a$).

$$(a{\cdot}b \to c) \to \{a \to (b \to c)\} \tag{6b}$$

Доказ.

$$(a{\cdot}b \to c) \to a{\cdot}b|\neg c \qquad \text{на осн. } (1d),$$

$$a{\cdot}b|\neg c \to a|b{\cdot}\neg c \qquad \text{на осн. } (5e),$$

$$a|b{\cdot}\neg c \to (a \to b|\neg c) \qquad \text{на осн. } (1c).$$

На осн. ($1c$) пишем:

$$b|\neg c \to (b \to c),$$

откуда на осн. акс. (6) получаем:

$$(a \to b|\neg c) \to (a \to (b \to c)).$$

Применяя последовательно акс. (6), получаем ($6b$).

[272]

$$(a{\cdot}b \to c) \to (a{\cdot}\neg c \to \neg b\ . \tag{6c}$$

Доказ.

$$a{\cdot}b|\neg c \to a{\cdot}\neg c|b \qquad \text{на осн. } (5f),$$

$$a{\cdot}\neg c|b \to (a{\cdot}\neg c\ \to \neg b) \qquad \text{на осн. } (1c),$$

и затем, применяя акс. (6), получаем (6c).

$$(a{\cdot}b \to c) \to (b \to (a \to c)). \tag{6d}$$

Доказ. Указанное выражение вытекает из:

$$(a{\cdot}b \to c) \to a{\cdot}b|\neg c \qquad \text{на осн. } (1d),$$

$$a{\cdot}b|\neg c \to b|a{\cdot}\neg c \qquad \text{на осн. } (5a),$$

$$b|a{\cdot}\neg c \to (b \to (a \to c)) \qquad \text{на осн. } (1a).$$

Из „принципа внесения“ вытекает „принцип силлогизма“

$$(a \to b){\cdot}(b \to c) \to (a \to c). \tag{7a}$$

Доказ. Заменим в выражении (6a):

a на $(b \to c)$,
b на $(a \to b)$,
c на $(a \to c)$:

$$\{(b \to c) \to [(a \to b) \to (a \to c)]\} \to \{(b \to c){\cdot}(a \to b) \to (a \to c)\}.$$

Левая часть может быть опущена, как акс. (6), а правая часть — написана в виде (7a).

Как уже было указано, в силлогизме вывод следует не из истинности посылок, а из их совместности. Поэтому силлогизм остается правильным и тогда, когда и посылки и заключение ложны. В данном случае ложность предложений $a \to b$, $b \to c$, $a \to c$ означает отсутствие внутренней связи между терминами a, b и c. Несмотря на это, правая и левая части выражения (7a) остаются внутренне связанными (хотя бы общностью терминов), и след. формула (7a) остается всегда правильной, каковы бы ни были a, b и c. Если заключение „$a \to c$“ ложно, т. е. если термины a и c не имеют внутренней связи, то из выражения

$$\neg(a \to c) \to (a \to b)|(b\ \to c),$$

которое получается применением акс. (4) к (7) , следует, что в таком случае посылки несовместны, независимо от того, истинны они или ложны. Т. о. интерпретация понятия совместности уточняется. Мы видим, что совместными могут быть лишь те предложения, из которых на основе принятых нами аксиом нельзя сделать никакого ложного вывода.

[273]

Аксиома (6) представляет собою только другое выражение формулы силлогизма, а следовательно также представляет собою только известное соотношение между совместностью и несовместностью входящих в нее терминов. Акс. (6) точно также всегда справедлива, каковы бы ни были a, b и c, и тот случай, когда выражения $(b \to c)$ и $(a \to b)$, входящие в формулу, являются истинными и утверждаемыми, представляет собою лишь частный случай применения акс. (6).

Так как выражения вида $(a{\cdot}b \to c)$, $(a \to (b \to c))$, и $(b \to (a \to c))$ выводятся одно из другого, то применение акс. (7) расширяется. При выводе из двух или нескольких посылок мы можем опускать те посылки, которые были ранее доказаны, например, писать $a \to c$ вместо $a{\cdot}b \to c$, если b является доказанным предложением.

Применяя принцип внесения к выражениям:

$$(a \to b) \to (a \to b) \text{ и } (a \to b) \to (\neg b \to \neg a),$$

соответственно получаем:

$$(a \to b){\cdot}a \to b, \tag{7b}$$

$$(a \to b){\cdot}\neg b \to \neg a. \tag{7c}$$

Выражение (7b) имеет формальное сходство со „схемой логического умозаключения“ по Hilbert'у; однако оно не может иметь аналогичного значения. В самом деле, поскольку предложения „a“ и „$a \to b$“ не являются утверждаемыми, истинность „b“ является только условием совместности этих предложений.

Из (7b) вытекает предложение:

$$\{a \to (b{\cdot}\neg b)\} \to \neg a, \tag{7d}$$

принятое Hilbert'ом в качестве аксиомы [11]).

Доказ. Подставим в (7b) выражение „$b{\cdot}\neg b$“ й на место b:

$$\{a \to (b{\cdot}\neg b)\}{\cdot}(b|\neg b) \to \neg a;$$

отсюда получается (7d), так как выражение „$b|\neg b$“ может быть опущено на осн. акс. (7).

$$(a \to (a \to b)) \to (a \to b) \tag{8}$$

Доказ.:

$$(a \to (a \to b)) \to (a{\cdot}a \to b)$$

на осн. принц, внесения,

$$(a \to a{\cdot}a){\cdot}(a{\cdot}a \to b) \to (a \to b)$$

на оси. принц, силлогизма; опуская акс. (3) и применяя принц, силлогизма, получаем (8a).

Из принц. силлогизма вытекает также выражение:

$$(a \to b){\cdot}a{\cdot}c \to b{\cdot}c. \tag{9a}$$

[274]

Доказ.:

$$(a \to b){\cdot}(b \to \neg c) \to (a \to \neg c) \qquad \text{на осн. принц. силл.}$$

[11]) „Ueber das Unendliche“ , Math. Ann., Bd. 95, p. 178.

$$(a\to b)\cdot\neg(a\to\neg c)\to\neg(b\to\neg c)\qquad \text{на осн. } (6c);$$

$(a\to b)\cdot(a\cdot c)$ получается из предыдущего на осн. опр. (1). Последнее выражение на осн. опр. (3) пишем в виде (9a).

Путем применения принципа вынесения к (9a) получаем:

$$(a\to b)\to(a\cdot c\to b\cdot c). \tag{9b}$$

На осн. (9b) ассоциативный закон может быть обобщен:

$$(a\cdot b\cdot c)\cdot d\to a\cdot(b\cdot c\cdot d) \tag{9c}$$

Доказ. Подставляем в (9b)

на место	a — $(a\cdot b)\cdot c$,
„ „	b — $a\cdot(b\cdot c)$,
„ „	c — d.

Опуская (5g) в левой части, пишем:

$$((a\cdot b)\cdot c)\cdot d\to(a\cdot(b\cdot c))\cdot d.$$

Но выраж. $((a\cdot b)\cdot c)\cdot d$ на осн. опр. (3) можно написать в виде $a\cdot b\cdot c)\cdot d$.

Кроме того на осн. (5g):

$$(a\cdot(b\cdot c))\cdot d\to a\cdot((b\cdot c)\cdot d).$$

Член справа пишем в виде $a\cdot(b\cdot c\cdot d$ и, применяя принц. силл., получаем (9c)
.

Из (9c) следует, что если ассоциативный закон справедлив для n предложений, то он справедлив и для $n+1$ предложений. На этом основании будем писать без скобок выражение совместности любого числа предложений.

(9b) может быть следующим образом обобщено:

$$((k\cdot l\cdot m\cdot\ldots)\to n)\to\{(k\cdot l\cdot m\cdot\ldots)\cdot(p\cdot q\cdot r\cdot\ldots)\to(p\cdot q\cdot r\cdot\ldots)\cdot n\}. \tag{9d}$$

Доказывается подстановкой в (9b) соответствующих выражений.

Докажем еще выражение:

$$(a\to b)\to\{(\neg a\to b)\to b\}, \tag{10}$$

называемое Hilbert'ом Princip des „tertium non datur“ [12]).

Доказ. Подставим в (9b) на место a выраж. $a\to b$, на место b выраж. $\neg b\to\neg a$ и на место c выраж. $\neg a\to b$. Тогда получим: из выражения

$$(a\to b)\to(\neg b\to\neg a)$$

[275]

следует:

$$(a\to b)\cdot(\neg a\to b)\to(\neg b\to\neg a)\cdot(\neg a\to b);$$

далее

$$(\neg b\to\ \neg a)\cdot(\neg a\to b)\to(\neg b\to b)\qquad (\text{принц. силл.}),$$

[12]) Math. Ann., Bd. 88, p. 153.

$$(\neg b \to b) \to b \qquad\qquad \text{на осн. } (2d).$$

Путем двукратного применения принц. силл. получаем выражение

$$(a \to b)\cdot(\neg a \to b) \to b,$$

которое на основ, принц, вынесения может быть написано в виде (10).

§ 4. Определим понятия „эквивалентности“ и „логической суммы“

$$(a \to\ b)\cdot(b \to a) = (a \rightleftarrows b) \qquad\qquad \text{опр. } (4),$$

$$\neg a | \neg b = a \vee b, \qquad\qquad \text{опр. } (5).$$

Мы указывали, что выражение „$a\cdot b \to a$“ вообще говоря не верно; но оно может быть и правильным в определенных частных случаях. Именно такой случай имеет место для эквивалентности предложений, как показывает следующая теорема:

$$(a \rightleftarrows b) \to (a \to\ b) \qquad\qquad (11a)$$

Доказ. Подставим в $(9b)$

на место a — $(a \to b)$,
„ „ b — $(a \to b)\cdot(a \to b)$,
„ „ c — $(b \to a)\cdot a$.

Тогда из выражения

$$(a \to b) \to (a \to b)\cdot(a \to\ b),$$

которое истинно на осн. акс. (3), вытекает выражение:

$$(a \rightleftarrows b)\cdot a \to (a \to b)\cdot(a \rightleftarrows b)\cdot a.$$

Последнее выражение на осн. акс. (7) может быть написано отдельно.

В $(9a)$ подставим на место c выраж. $(a \rightleftarrows b)$; в результате получим:

$$(a \to b)\cdot(a \rightleftarrows b)\cdot a \to (a \rightleftarrows b)\cdot b.$$

Далее подставим в $(9a)$

на место a — b,
„ „ b — a,
„ „ c — $a \to b$,

и получаем:

$$(a \rightleftarrows b)\cdot b \to (a \to b)\cdot a;$$

затем согласно $(7b)$:

$$(a \to b)\cdot a \to b.$$

[276]

Применяя три раза принцип силлогизма, получаем:

$$(a \rightleftarrows b)\cdot a \to b \qquad\qquad (11b),$$

Наконец, применяя к последнему выражению принцип вынесения, получаем ($11a$).

Так как отношение эквивалентности симметрично, то, очевидно, будет правильно также выражение:

$$(a \rightleftarrows b) \rightleftarrows (b \rightarrow a).$$

В виду ($11a$) и ($11b$) выгодно соединять прямые и обратные выводы в одну формулу эквивалентности. На осн. опред. (4) некоторые уже знакомые нам выражения могут принять следующий вид:

$$\begin{gathered} a \rightleftarrows \neg\neg a, \\ (a \rightarrow b) \rightleftarrows (\neg b \rightarrow \neg a), \\ (a \cdot b) \cdot c \rightleftarrows a \cdot (b \cdot c) \rightleftarrows (a \cdot c) \cdot b, \\ a \cdot b \rightleftarrows b \cdot a, \\ \{a \rightarrow (b \rightarrow c)\} \rightleftarrows (a \cdot b \rightarrow c), \end{gathered}$$

и т. д.

Понятие логической суммы мы должны интерпретировать иначе, нежели в классической теории. Выражение $a \vee b$ означает, правда, что по крайней мере одно из двух указанных предложений является истинным, но не всякие два предложения, из которых одно истинно, могут образовать логическую сумму. Здесь также необходима „связь по смыслу“, аналогичная отношению вывода. Нижеследующие формулы выражают отношение между логической суммой, с одной стороны, и уже знакомыми нам отношениями — с другой.

$$(\neg a \rightarrow b) \rightleftarrows (a \vee b), \tag{12a}$$

$$(a \rightarrow b) \rightleftarrows (\neg a \vee b), \tag{12b}$$

$$a|b \rightleftarrows (\neg a \vee \neg b), \tag{12c}$$

$$a \cdot b \rightleftarrows \neg(\neg a \vee \neg b), \tag{12d}$$

$$\neg a \cdot \neg b \rightleftarrows \neg(a \vee b). \tag{12e}$$

Указанные выражения легко выводятся на осн. опр. (5) и выражений ($1c$), ($1d$), ($3b$) и пр.

Выведем несколько формул, в которые входит выражение логической суммы:

$$a \vee b \rightleftarrows b \vee a \tag{13a}$$

вытекает из ($3i$) и опр. (5).

$$(a \vee b)(a \rightarrow c) \rightarrow c \vee b \tag{13b}$$

Доказ.:

$$(\neg b \rightarrow a) \cdot (a \rightarrow c) \rightarrow (\neg b \rightarrow c) \qquad \text{на осн. принц, силл.}$$

Это выраж. на осн. опр. (5) и ($13a$) преобразуется в ($13b$).

[277]

$$(b\vee c)\rightarrow\{(a\vee b)\rightarrow(a\vee c)\} \qquad (13c)$$

Доказ.:

$$(b\rightarrow c)\rightarrow(\neg c\rightarrow\neg b) \qquad \text{на осн. акс. (4)}$$

$$(\neg c\rightarrow\neg b)\rightarrow\{(\neg a\cdot\neg c)\rightarrow(\neg a\cdot\neg b)\} \qquad \text{на осн. (9}b\text{)}$$

$$\{(\neg a\cdot\neg c)\rightarrow(\neg a\cdot\neg b)\}\rightarrow\{(a\vee b)\rightarrow(a\rightarrow c)\} \qquad \text{на осн. акс. (4) и опр. (5).}$$

Применяя принц. силл., получаем ($13c$).

$$a\vee(b\vee c)\rightleftarrows(a\vee b)\vee c \qquad (14)$$

Доказ. Согласно ($12a$):

$$a\vee(b\vee c)\rightleftarrows\{\neg a\rightarrow(b\vee c)\},$$

а также

$$\{\neg a\rightarrow(b\vee c)\}\rightarrow\{\neg a\rightarrow(\neg b\rightarrow c)\},$$

Согласно принц. внесения:

$$\{\neg a\rightarrow(\neg b\rightarrow c)\rightarrow\{\neg a\cdot\neg b\rightarrow c\};$$

кроме того:

$$(\neg a\cdot\neg b\rightarrow c)\rightarrow(\neg c\rightarrow a\vee b) \qquad \text{на осн. Акс. (4) и опр. (5),}$$

$$(\neg c\rightarrow a\vee b)\rightarrow(c\vee(a\vee b)) \qquad \text{на осн. (12}a\text{),}$$

$$c\vee(a\vee b)\rightarrow(a\vee b)\vee c \qquad \text{на осн. (13}a\text{).}$$

Последовательно применяя принц. силл., получаем:

$$a\vee(b\vee c)\rightarrow(a\vee b)\vee c,$$

Аналогично доказывается:

$$(a\vee b)\vee c\rightarrow a\vee(b\vee c),$$

Что касается дистрибутивного закона „$a.(b\vee c)\rightleftarrows a\cdot b\vee a\cdot c$“, то указанное выражение в нашей системе должно быть признано ложным.

§ 5. Докажем известную „praeclarum theorema“ Leibniz’а:

$$((a\rightarrow b)\cdot(c\rightarrow d)\rightarrow(a\cdot c\rightarrow b\cdot d) \qquad (15a)$$

Доказ. Подставим в ($9a$) на место c выражение „$c\cdot(c\rightarrow d)$“:

$$(a\rightarrow b)\cdot a\cdot c\cdot(c\rightarrow d)\rightarrow b\cdot c\cdot(c\rightarrow d).$$

Подставляем опять в ($9a$)

на место a — c,
„ „ b — d,
„ „ c — b,

и получаем:

$$(c\rightarrow d)\cdot c\cdot b\rightarrow b\cdot d.$$

[278]

Применяя принц. силл. и коммутат. закон, получаем выражение:

$$(a \to b)\cdot(c \to d)\cdot a\cdot c \to b\cdot d, \qquad (15b)$$

откуда на осн. принц. вынесения получаем (15a).

Теорема Leibniz'а необходима для обоснования дедукции; это предложение носит весьма общий характер; всевозможные формы дедуктивных умозаключений можно получить, как частные случаи (15a) путем простых преобразований
Выражение (15a) может быть интерпретировано следующим образом: „если посылки (a и c) совместны, то и выводы (b и d) совместны"; или: „совместность выводов есть условие совместности посылок" [13]).

В работах по математической логике теорема Leibniz'а выводится, обычно, при помощи принципа упрощения [14]), между тем указанная теорема от принципа упрощения вовсе не зависит. Так как символическая теория не зависит от той или иной интерпретации и так как мы до сих пор не ввели ни одного символического выражения, которое не могло бы существовать в системах Russell'а или Peano, то указанный в тексте способ вывода может быть применен и в классическом исчислении предложений.

(15a) может быть представлено в виде:

$$(a \to b)\cdot(c \to d) \to \{(a \vee c) \to (b \vee d)\} \qquad (15c)$$

Доказ. На осн. акс. (4) и (9b) имеем следующие выражения:

$$(a \to b)\cdot(c \to d) \to (\neg b \to \neg a)\cdot(c \to d),$$
$$(\neg b \to \neg a)\cdot(c \to d) \to (\neg b \to a)\cdot(\neg d \to \neg c),$$

Далее на осн. (15a):

$$(\neg b \to \neg a)\cdot(\neg d \to \neg c) \to (\neg b\cdot\neg d \to \neg a\cdot\neg c).$$

на осн. акс. (4) и опр. (5):

$$(\neg b\cdot\neg d \to \neg a\cdot\neg c) \to \{(a \vee c) \to (b \vee d)\}.$$

Применяя последовательно принц. силл. получаем (15c).

Из (15a), как частный случай, вытекает так наз. „принцип составления":

$$(a \to b)\cdot(a \to c) \to (a \to b\cdot c) \qquad (16a)$$

Доказ.:

$$(a \to b)\cdot(a \to c) \to (a\cdot a \to b\cdot c) \qquad \text{на осн. (15}a\text{),}$$
$$(a \to a\cdot a)\cdot(a\cdot a \to b\cdot c) \to (a \to b\cdot c) \qquad \text{на осн. принц. силл.}$$

[279]

[13]) Необходимо иметь в виду, что „$a\cdot c$", т.е. „совместность предложений a и c" есть третья независимая посылка в выражении (15a), и что выражение „$a|c$" совместно с выражением „$(a \to b)\cdot(c \to d)\cdot b\cdot d$".

[14]) См. напр. Whitehead and Russell, Princ. Math., p. 115–116.

Опуская выражение $a \to a{\cdot}a$ как акс. (3) и применяя принц. силл., получаем ($16a$).

$$a \to \{(a \to b) \to (a{\cdot}b)\} \qquad (16b)$$

Доказ. На осн. ($16a$) пишем:

$$(a \to a){\cdot}(a \to b) \to (a \to a{\cdot}b);$$

опускаем выражение $(a \to a)$ и на осн. (акс. 5) получаем ($16b$).

$$\{(a \to d){\cdot}(b \to e){\cdot}(c \to f)\} \to \{a{\cdot}b{\cdot}c \to d{\cdot}e{\cdot}f\} \qquad (17a)$$

Доказ. В ($15a$) подставляем:

на	место	a	выражение	$a{\cdot}b{\cdot}(a \to d){\cdot}(b \to e)$,
„	„	b	„	$d{\cdot}e$,
„	„	c	„	c,
„	„	d	„	f.

Тогда левая часть полученного выражения будет иметь вид:

$$\{a{\cdot}b.(a \to d){\cdot}(b \to e) \to d{\cdot}e\}{\cdot}(c \to f)$$

и правая часть:

$$a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}(a \to d){\cdot}(b \to e) \to d{\cdot}e{\cdot}f.$$

Так как в левой части выражение в фигурных скобках может быть опущено, как доказанное ($15b$), то все выражение в целом может быть написано в виде:

$$(c \to f) \to \{a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}(a \to d){\cdot}(b \to e) \to (d{\cdot}e{\cdot}f)\},$$

откуда, применяя последовательно принципы внесения и вынесения, получаем ($17a$).

Из ($17a$) следует, что если теорема Leibniz'a справедлива для n посылок, то она справедлива и для $n{+}1$. На осн. ($17a$) получаем также следующую обобщенную формулу:

$$\left.\begin{aligned}\{(a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\ldots \to f){\cdot}(k{\cdot}l{\cdot}m{\cdot}\ldots \to p){\cdot}(p{\cdot}q{\cdot}r{\cdot}\ldots \to t)\ldots\} \to \\ \to \{(a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}\ldots{\cdot}k{\cdot}l{\cdot}m{\cdot}\ldots{\cdot}p{\cdot}q{\cdot}r{\cdot}\ldots) \to (f{\cdot}p{\cdot}t{\cdot}\ldots)\}\end{aligned}\right\} \qquad (17b)$$

Сопоставляя выражения ($9d$) и ($17b$), получаем следующий закон: „если дана система n совместных между собою посылок $a{\cdot}b{\cdot}c...k{\cdot}l{\cdot}m...$, то вывод, вытекающий из любой комбинации посылок, совместен со всеми остальными посылками и с выводами, вытекающими из всякой другой комбинации посылок“.

§ 6. С выводом теоремы Leibniz'a задачу общего обоснования дедукции без применения принципа упрощения можно считать разрешенной. Переходим к рассмотрению специальных функций.

До сих нор мы отвлекались от вопроса о том, что представляют собою те предложения a, b, c ..., которые мы подставляем в наши формулы, отвлекались от вопроса об их достоверности и доказуемости. Однако истинные предложения

[280]

в математике имеют значение постольку, поскольку они могут быть доказаны. Поэтому для символической логики возникает необходимость сделать предметом рассмотрения наряду с предложениями a, b, c ... также предложения об их доказуемости или недоказуемости. Если рассматривать a как предложение, которое истинно или ложно, независимо от вопроса о доказуемости, то предложения „a доказуемо“ или „a недоказуемо“ будут функциями предложения a. Обозначим теперь „a доказуемо“ через $\Phi(a)$ и „ложность a доказуема“ через $X(a)$. Выражения $\neg\Phi(a)$ и $\neg X(a)$ будут означать соответственно: „a недоказуемо“ и „ложность a недоказуема“.

Предложение a доказуемо, если нет принципиальных затруднений для решения вопроса, хотя бы практически решение было невозможным в виду длительности и утомительности вычислений. Например, вопрос о каком-либо свойстве большого конечного числа должен рассматриваться как разрешимый, если все затруднение заключается в громоздкости вычислений. Укажем, что $\Phi(a)$ охватывает также и те случаи, когда a уже доказано или очевидно [15]). Если же затруднения в решении вопроса имеют принципиальный характер, непреодолимый при современном состоянии науки, то предложение — недоказуемо, и мы имеем выражение $\Phi(a)$.

Закон „tertium non datur“ может быть применен к выражениям $\Phi(a)$ и $\neg\Phi(a)$, а также к $X(a)$ и $\neg X(a)$, но к выражениям $\Phi(a)$ и $X(a)$ указанный закон, как очевидно, непосредственно применен быть не может. Из приведенных разъяснений следует также, что $\Phi(a)$ и $X(a)$ в области финитного образуют полную дизъюнкцию, но в области трансфинитного дизъюнкции не образуют и могут быть вместе ложными.

Мы утверждаем, что подобные функции, хотя и без специальных символических обозначений, фактически введены интуиционистами в математику. Выражение „всякое свойство для всякой системы или справедливо или невозможно“ различно оценивается в чисто формальной математике и в работах интуиционистов именно потому, что понимается не в одинаковом смысле. Если в первом случае принимается, что определенным „в себе“ является всякое свойство, то во втором случае выдвигается вопрос о доказуемости свойства. В первом случае вопрос о существовании свойства трактуется в смысле выражения „a“ , тогда как во втором — в смысле „$\Phi(a)$“. Равным образом выражение „абсурдность предложения“ соответствует функции $X(a)$. Brouwer рассматривает случай, когда из свойства следует его отрицание, только как частный случай „абсурдности“, понимая это выражение в более широком смысле [16]). Он употребляет выражение „абсурдно“ во всех тех случаях, когда может быть доказано, что a противоречит какой-либо аксиоме или доказанному предложению. Но и наше выражение $X(a)$ имеет тот же самый смысл. Отсюда становится понятным утверждение Brouwer’а, что справедливость свойства и его абсурдность образуют полную дизъюнкцию только в определенной конечной системе.

[15]) Таким образом, можно написать Φa всякий раз, когда предложение a достоверно. Но Φa — более объемлющее понятие по сравнению с понятием достоверности, так как под Φa можно подразумевать также истины только принципиально доступные, фактически же остающиеся неизвестными. Отрицание Φa, т. е. $\neg\Phi a$ охватывает как те случаи, когда a истинно, но недоступно доказательству, так и те, — когда a ложно.

[16]) L. E. J. Brouwer, „Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe“ Jahresbericht d. deutsch. Math.–Ver., 33 Bd.

Хотя свойства такой системы могут оставаться

[281]

частично неизвестными, но для полного их выяснения требуется только достаточное количество времени [17]).

Далее могут быть образованы функции от функций, как например $X(\Phi(a))$ или $X(X(a))$. Укажем, как должны интерпретироваться подобные выражения.

В то время как выражения $\Phi(a)$ и $\Phi(\Phi(a))$ („a доказуемо“ и „доказуемо, что a доказуемо“) имеют одно и то же значение [18]), выражения $\neg\Phi(a)$ и $\Phi(\neg\Phi(a))$ значительно отличаются по смыслу.

$\neg\Phi(a)$ выражает только факт неразрешимости некоторой математической проблемы, тогда как $\Phi(\neg\Phi(a))$ означает, что этот факт может быть введен в математику, как доказуемый. Недоказуемость предложения нуждается в доказательстве подобно всякой другой неочевидной истине. Доказательство неразрешимости математической проблемы является в свою очередь математической проблемой, разрешение которой может иметь большое значение.

Выражение $X(X(a))$ может быть истолковано в смысле понятия, употребляемого Brouwer'ом „абсурдность абсурдности a“. Оно означает, что не только ложность a недоказуема, но что эта недоказуемость может быть доказана [19]).

С формальной стороны дело сводится к тому, что мы вводим в логическое исчисление понятие $\Phi(a)$, которое рассматриваем формально как неопределимое, а также группу из трех „аксиом доказуемости“:

$$\Phi(a) \to a \qquad \text{акс. (8)}$$

„a доказуемо, след. a истинно“ [20]).

$$\Phi(a) \to \Phi(\Phi(a)) \qquad \text{акс. (9)}$$

„a доказуемо, след. доказуемо, что a доказуемо“ [21]).

$$\Phi(a \to b) \to \{\Phi(a) \to \Phi(b)\} \qquad \text{акс. (10)}$$

„Если доказуемо, что из a следует b, и если предложение a также доказуемо, то доказуемым является и b“.

Выражение X(a) может быть определено следующим образом:

$$\Phi(\neg a) = X(a) \qquad \text{опр. (6)}$$

На осн. опр. (6) выражение $\Phi(\neg\Phi(a))$ напишется в виде $X(\Phi(a))$, выражение $\Phi(\neg X(a))$ в виде $XX(a)$ и т. д.

[17]) „Ueber die Bedeutung des Satzes vom ausgeschl. Dritten“, Journ. f. die reine u. angew. Math., Bd. 154.

[18]) В самом деле, доказательство истинности предиката и доказательство доказуемости предиката — одно и то же.

[19]) Т. е. допущение, что „ложность a может быть доказана“, приводится к противоречию с каким-либо очевидным или доказуемым предложением.

[20]) Или иначе: „доказуемость a предполагает истинность этого предложения“. Обратное предложение $a \to \Phi a$ не имеет места в нашей системе. Мы, таким образом, принимаем существование истин, недоказуемых при современном состоянии науки. Подобное допущение, как очевидно, не имеет ничего общего с „ignorabimus“.

[21]) Из „a очевидно“ следует „очевидно, что a очевидно“.

[282]

Так как все аксиомы и выведенные из них предложения мы рассматриваем как утверждаемые и след, достоверные, то каждое выражение, допущенное в качестве аксиомы, или выведенное в предыдущих параграфах, может быть написано в виде функции $\Phi(a)$.

Условимся еще для простоты выражения $\Phi(a)$ и $X(a)$ в дальнейшем писать без скобок: Φa и Xa. Таким образом, вместо выражения $\Phi(X(a))$ будем писать ΦXa и т. д. Выражение, стоящее вслед за Φ или X до конца формулы или же до знака какой-либо операции, будем рассматривать в качестве аргумента указанной функции.

Сопоставляя опр. (6) и акс. (8) , получаем:

$$Xa \to \neg a, \tag{18a}$$

откуда также:

$$a \to \neg Xa. \tag{18b}$$

На осн. акс. (8) и (18b):

$$\Phi a \to \neg Xa, \tag{18c}$$

откуда на осн. акс. (4):

$$Xa \to \neg \Phi a. \tag{18d}$$

На осн. акс. (8) и (4) получаем:

$$\neg a \to \neg \Phi a. \tag{18e}$$

$$\Phi a \rightleftarrows \Phi\neg\neg a \tag{18f}$$

Доказ. Предложение $a \rightleftarrows \neg\neg a$ может быть написано в виде $\Phi(a \rightleftarrows \neg\neg a)$; тогда на осн. акс. (10):

$$\Phi(a \rightleftarrows \neg\neg a) \to \{\Phi a \rightleftarrows \Phi\neg\neg a\} \qquad (18f),$$

при чем левая часть может быть опущена на осн. акс. (7).

Так как, согласно опр. (6), $\Phi\neg\neg a = X\neg a$, то из (18f) следует также:

$$\Phi a \rightleftarrows X\neg a. \tag{18g}$$

Вставляя в акс. (8) Φa на место a и сопоставляя с акс. (9), получаем:

$$\Phi a \rightleftarrows \Phi\Phi a. \tag{19a}$$

На место a подставляем $\neg a$ и, принимая во внимание опр. (6), получаем:

$$\Phi a \rightleftarrows \Phi Xa. \tag{19b}$$

Вставляем в (18b Xa на место a:

$$Xa \to \neg XXa. \tag{19c}$$

Выведем предложение:

$$\Phi(a \to b) \to \{Xb \to Xa\} \tag{20}$$

Доказ. Подставляем в акс. (10) „$a \to b$“ на место a и „$\neg b \to \neg a$“ на место b.

$$\Phi\{(a \to b) \to (\neg b \to \neg a)\} \to \{\Phi(a \to b) \to \Phi(\neg b \to \neg a)\},$$

[283]

при чем левая часть на осн. акс. (4) и (7) может быть опущена.

На основании акс. (10) и опр. (6):

$$\varPhi(\neg b \to \neg a) \to \{Xb \to Xa\}.$$

Применяя принцип силл., получаем предлож. (20).

Из (20) вытекает целый ряд нужных нам формул:

$$Xa \to X\varPhi a \tag{21a}$$

вытекает из акс. (8) на осн. (20);

$$XX\varPhi a \to XXa \tag{21b}$$

вытекает из (21a) на осн. (20);

$$\varPhi Xa \to X\varPhi a. \tag{21c}$$

вытекает из (19b) и (21a).

Обратные выводы от правой части к левой невозможны, так как правые части выражений (21a), (21b), (21c) являются более слабыми утверждениями, нежели выражения в левой части.

$$\varPhi a \to XXa \tag{21d}$$

„Из доказуемости a следует абсурдность абсурдности a“.

Доказ.: на осн. (21a) пишем:

$$X\neg a \to X\varPhi\neg a.$$

Последнее выражение на осн. (18g) и опр. (6) можно написать в виде (21d).

$$\varPhi a \to XX\varPhi a. \tag{21e}$$

Доказ. В (21d) подставим $\varPhi a$ на место a; принимая во внимание акс. (9) и принцип, силл., получаем (21).

(21d) и (21e) могут быть интерпретированы следующим образом: „доказательство предложения a есть вместе с тем доказательство того, что ложность a недоказуема и доказательство ложности невозможно“. Заметим, что выражение „$a \to XXa$“ не может быть выведено из принятых нами аксиом [22]).

$$X\varPhi\varPhi a \rightleftarrows X\varPhi a \tag{21f}$$

Доказ. Подставим в (20) на место a — $\varPhi a$ и на место b — $\varPhi\varPhi a$. В таком случае из (19a) вытекает (21f) .

Пусть мы имеем бесконечный ряд S и задаемся вопросом, существует ли в этом ряду член со свойством . Такой член или существует, или же нет; закон „tertium non datur“ верен; но пока истина остается скрытой, она

[22]) Это предложение ложно, так как, если даже a истинно, но если мы не имеем соответствующего доказательства, то мы не всегда можем доказать и того, что ложность a не может быть доказана, Пусть, напр., a — существование марсиан.; a или $\neg a$ истинно, но мы не имеем ни XXa ни $XX\neg a$.

не может служить для определения понятий. Когда же мы переходим к вопросу о доказуемости, то закон „tertium non datur“ непосредственно не может быть применен, и мы имеем уже не две, а три возможности:

[284]

1) Если мы нашли член со свойством E, то мы имеем Φa.

2) Если из закона, определяющего свойства ряда S, следует, что член со свойством E невозможен, — имеем Xa.

3) Возможно, что и то и другое ложно, т. е. мы имеем Φa и Xa. В этом случае можно найти третье вполне определенное решение, а именно XXa, так как очевидно, что в данном случае невозможно путем конечного числа операций доказать несуществование члена со свойством E.

Выражение $(18d)$ можно написать в виде „$\Phi a|Xa$“ и $(19c)$ в виде „$Xa|XXa$. Принимая во внимание еще $(21d)$, получаем трехчленную схему, совпадающую со схемой Brouwer'а [23]).

$$\Phi a \to XXa \longleftrightarrow Xa \tag{22}$$

Приведенная схема, таким образом, вовсе не противоречит закону „tertium non datur“.

§ 7. В работах Brouwer'а имеет большое значение для образования понятий применение предикатов „абсурдности“ и „абсурдности абсурдности“. Brouwer часто прибегает к следующему приему определения понятий: „назовем вещественное число g рациональным, если могут быть определены (bestimmt werden können) два целые числа p и q такие, что $g = \frac{p}{q}$; и назовем g иррациональным, когда допущение, что g рационально, приводит к абсурду“ [24]).

Здесь очевидно, что рациональное число определяется посредством доказуемости существования двух целых чисел, иначе говоря, посредством функции вида Φa. Если допущение, что существование чисел и q доказуемо, приводит к абсурду, то число g иррационально. Следовательно, иррациональность определяется посредством $X\Phi a$. Если мы применим предикат абсурдности к последнему выражению, то получим выражение $XX\Phi a$, из которого на осн. $(21b)$ следует XXa. В этом, случае число g не будет ни рациональным, в прежде определенном смысле, ни иррациональным; оно будет рациональным в ином смысле. Brouwer использует предикат „абсурдности абсурдности“ для определения другого типа рациональности числа, отличного от прежнего. Спрашивается, если мы будем удлинять ряд предикатов абсурдности, не будем ли мы получать все время новые понятия. Brouwer указывает, что если мы имеем ряд предикатов „абсурдность абсурдности ... абсурдности“, то вычеркивание двух рядом стоящих предикатов абсурдности возможно не только в классической, но и в интуиционистской теории; в последнем случае с тем ограничением, что последний в ряду предикат абсурдности не может быть вычеркнут [25]). В нашей системе также может быть получен указанный вывод; однако условие осложняется еще тем, что последний в ряду предикат абсурдности относится не

[23]) Знаком „ $\longleftrightarrow$ Brouwer выражает противоречие между предложениями.

[24]) L. E. J. Brouwer, „lntuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe“, Jahr.-Ber. d. deutsch. Math. Ver., Bd. 33.

[25]) Ibid.

непосредственно к предложению a, но к Φa. В таком случае исключение последнего предиката абсурдности из правила вычеркивания двух рядом стоящих предикатов, не противоречит закону „tertium non datur“.

Brouwer доказывает теорему „абсурдность абсурдности абсурдности эквивалентна абсурдности“ [26]).

[285]

Указанная теорема в системе Brouwer'а играет роль как бы закона „quartum non datur“, ограничивающего процесс образования понятий [27]).

Мы также можем вывести аналогичную теорему, при условии, что последний предикат абсурдности относится к Φa

$$XXX\Phi a \rightleftarrows X\Phi a. \tag{23}$$

Доказ.:

А) Из ($21d$) на основ. (20) следует:

$$XXXa \to X\Phi a.$$

Заменяя в последнем выражении а на Φa, получаем:

$$XXX\Phi a \to X\Phi\Phi a,$$

при чем на осн. ($21f$) и принцип. силл. получаем первую половину доказываемого выражения:

$$XXX\Phi a \to X\Phi a.$$

В) Заменяем в ($21d$) a на Xa:

$$\Phi Xa \to XXXa.$$

В связи с ($19b$), и применяя принцип, силл., получаем:

$$Xa \to XXXa.$$

Заменяем a на Φa:

$$X\Phi a \to XXX\Phi a$$

Теорема доказана.

Указанная теорема не может быть доказана в форме:

$$XXXa \rightleftarrows Xa,$$

так как посылка

$$XXXa \to Xa.$$

ложна [28]).

[26]) Ibid.

[27]) „Quartum поп datur“ следует понимать не в смысле полной альтернативы из трех членов, но в смысле исключения излишних понятий из схемы вида выражения (22). Альтернатива невозможна уже потому, что все три члена выраж. (22) могут быть ложными одновременно.

[28]) Принимая во внимание ($18a$), из $XXXa$ должно следовать $\neg a$. Однако, допустим следующее: как предложение a, так и предложение $\neg a$ недоказуемо, но для того, чтобы в этом убедиться нужно было бы пробежать весь бесконечный ряд доказуемых предложений, что невозможно. При этом выражение $XXXa$ будет истинно как в том случае, если a ложно, так и в том случае, если a истинно. Такой случай мы будем иметь, например, если под a подразумевать существование марсиан.

Итак, „исчисление совместности предложений“ позволяет производить операции не только непосредственно над предложениями a, b, c ..., но и над их функциями Φa, $X a$ и т. д. Введение этого рода функций открывает особый путь к обоснованию закона „Tertium non datur“, который заключается в согласовании выводов интуиционизма с этим законом.

[286]

Введение указанных функций в классическую математическую логику невозможно, так как интерпретация понятия „следовать“, как материального вывода, лишает смысла все выражения, доказанные для введенных нами функций. Кроме того, в классической теории принимаются и выводятся предложения, которые с нашей точки зрения не могут быть иначе оценены как ложные. Например, из предложения, доказываемого в классической теории, „все истинные предложения эквивалентны“ вытекает следующий вывод:

$$a \rightleftarrows \Phi a \rightleftarrows X\Phi \rightleftarrows XX\Phi a.$$

Подобный вывод делает введение указанного вида функций лишенным какого бы то ни было значения; в этом случае при построении схем трансфинитных заключений не осталось бы иного пути, кроме отрицания закона „tertium non datur“.

Sur la théorie de la compatibilité des propositions.

Par **M. J. Orloff** (Moscou).

(*Résumé.*)

1) Dans la théorie symbolistique de compatibilité des propositions la notion du produit logique doit être interprêtée dans le sens d'une hypothèse de compatibilité des propositions — et non dans celui de coïncidence de leur affirmation. „Implication“ doit être interprêtée dans le sens de la liaison intérieure des propositions. Les interprétations des autres notions changent de ce fait.

2) Le „principe de simplification“ et toutes autres propositions similaires doivent être considerés comme faux. Cela mène à la découverte d'un fait remarquable que les théorèmes fondamentaux de la déduction, déduits jusqu'ici au moyen du principe susindiqué, n'en dépendent nullement.

3) La théorie de compatibilité des propositions admet la déduction des principes de „l'intuitionismus“ sans négation du principe „tertium non datur“.

(Rec. Math. XXXV: 3–4; 1928)
